Trabajo Práctico Nro. 9

Transformada de Laplace

1. Hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones, indicando su región de convergencia.

   (a) $f(t) = H(t)$ (b) $f(t) = tH(t)$

   (c) $f(t) = e^{at}\, H(t)$ (d) $f(t) = t^2 e^{at}\, H(t); \quad a \in \mathbb{R}$

   (e) $f(t) = t\, e^{3t}\, H(t-2)$ (f) $f(t) = (t-2)\, e^{3t-6}\, H(t-2)$

   (g) $f(t) = \operatorname{sen}(wt) H(t)$ (h) $f(t) = \cos(\omega\, t+\phi)\, H(t);\ \omega, \phi \in \mathbb{R}$

   (i) $f(t) = e^{at} \cos(\omega\, t)\, H(t)$ (j) $f(t) = \dfrac{(\cos(\omega\, t) - 1)}{t} H(t);\ w \in \mathbb{R}$

   (k) $f(t) = \begin{cases} t\, e^t & 0 \leqslant t < 1 \\ e^t & t \geqslant 1 \end{cases}$ (l) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t < 4 \\ t & t \geqslant 4 \end{cases}$

   (m) $f(t) = \cos^3 t\, H(t)$ (Sug.: escribir cost en términos de la exponencial)

2. Mostrar que para f definida en $(0, +\infty)$ y $\alpha > 0$:

   (a) si $\lim\limits_{t\to t_0} e^{-\alpha t} f(t)$ existe y es finito entonces f es de orden exponencial α,

   (b) si f es de orden exponencial α entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-st} f(t) = 0\ \forall s : \mathrm{Re}(s) > \alpha$,

   (c) si f es continua a trozos y de orden exponencial y $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ entonces $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} F(s) = 0$.

3. Sean $a, b > 0$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

   $$f(t) = \begin{cases} n\, b & \text{si} \quad (n-1)\, a \leqslant t < n\, a, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

   Probar que f es continua trozos y es de orden exponencial; calcular su transformada de Laplace.

4. (a) Mostrar que si $\mathcal{L}[f](s_0)$ existe entonces $\mathcal{L}[f](s)$ existe $\forall s : \mathrm{Re}(s) \geqslant s_0$.

   (b) Verificar que la función $te^{t^2}\cos(e^{t^2})$ no es de orden exponencial pero existe su transformada de Laplace en $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$.

5. Hallar la transformada de Laplace de cada una de las funciones periódicas:

   (a) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leqslant t < 1 \end{cases}$ $\quad f(t+1) = f(t), \quad t \geqslant 0$

   (b) $f(t) = |\operatorname{sen} t| H(t)$

6. Hallar la transformada inversa de Laplace para las siguientes funciones $F(s)$ cuya región de convergencia es la indicada:

   (a) $F(s) = \dfrac{1}{s+1}$; $\mathrm{Re}(s) > -1$ (b) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+4}$; $\mathrm{Re}(s) > 0$

(c) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$; $\operatorname{Re}(s)>-2$

(d) $F(s)=\dfrac{s^2-s+1}{s^2\,(s+1)}$; $\operatorname{Re}(s)>0$

(e) $F(s)=\dfrac{s+1}{6s^2+7s+2}$; $\operatorname{Re}(s)>-\dfrac{1}{2}$

(f) $F(s)=\dfrac{s}{s^2+2s+4}$; $\operatorname{Re}(s)>-1$

(g) $F(s)=\operatorname{Log}\left(\dfrac{s+a}{s-a}\right)$; $\operatorname{Re}(s)>\operatorname{Re}(a)\geqslant 0$

(h) $F(s)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{a}{s}\right)$; $\operatorname{Re}(s)>0$

7. (a) Sabiendo que $F(s)=\mathcal{L}[f(t)H(t)]$, comprobar que
$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-s\tau}F(s)] = H(t-\tau)f(t-\tau) \quad \forall \tau \geq 0.$$
   (b) Calcular la transformada inversa de Laplace de

   (i) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1}$ (ii) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s}$

   (iii) $F(s)=\dfrac{e^{-3s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$ (iv) $F(s)=\dfrac{e^{-as}}{(s^2+b^2)}$ $a,b>0$

8. Sean P y Q polinomios en s con el grado de Q mayor que el de P. Mostrar que si Q tiene sólo ceros simples, $a_1,\ldots,a_n$, vale:
$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right](t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}e^{a_j t}$$
Aplicar este resultado a las funciones del ejercicio 6 que cumplen las hipótesis requeridas y confrontar las soluciones obtenidas.

9. Resolver usando transformada de Laplace ($t\geqslant 0$):

   (a) $y''+4\,y'+4\,y=8\,e^{-2t}$; $y(0)=1,\quad y'(0)=1$

   (b) $y''+4\,y'+3\,y=u(t)$; $y(0)=3,\quad y'(0)=-2$

   (c) $y''+2\,y'+5\,y=f(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\in[0,1) \\ 2\,e^{-(t-1)} & \text{si } t\notin[0,1) \end{cases}$; con condiciones iniciales nulas.

   (d) $y''-4\,y'+8\,y=f(t)=\begin{cases} t & \text{si } t\in[0,2) \\ t+1 & \text{si } t\in[2,4) \\ 0 & \text{si } t\geqslant 4 \end{cases}$; $y(0)=1,\quad y'(0)=0$

   (e) $y'''+y''-2\,y=5\,e^{t}$; $y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=2$

   (f) $y'(x)-4\,e^{x}\int_0^x e^{-t}\,y(t)\,dt-y(x)=f(x)=\begin{cases} 2\,x\,e^{-x} & \text{si } x\geqslant 4 \\ 0 & \text{si } x<4 \end{cases}$; $y(0)=0$

   (g) $y(x)-e^{x}\int_0^x e^{-t}\operatorname{sen}(x-t)\,y(t)\,dt=f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1) \\ 0 & \text{si } x\notin[0,1) \end{cases}$

10. Resolver usando transformada de Laplace los siguientes sistemas:

    (a) $\begin{cases} x'(t) = -7\,x(t) + y(t) + 5 \\ y'(t) = -2\,x(t) - 5\,y(t) - 37\,t \end{cases}$ con condiciones iniciales nulas.

    (b) $\begin{cases} x'(t) = 4\,x(t) + 5\,y(t) + 4\,e^t\cos(t) \\ y'(t) = -2\,x(t) - 2\,y(t) \end{cases}$ con condiciones iniciales nulas.

    (c) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 5\,x(t) - 3\,y(t) \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

    (d) $\begin{cases} x'(t) = 2\,x(t) - 5\,y(t) + \operatorname{sen}(t) \\ y'(t) = x(t) - 2\,y(t) \end{cases}$ con condiciones iniciales nulas.

    (e) $\begin{cases} 2\,x'(t) - y''(t) - 4\,y(t) = 0 \\ x''(t) - x(t) + 5\,y'(t) = e^t \end{cases}$ $x(0) = 3,\ x'(0) = -6, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 2.$

11. Resolver los siguientes problemas de la onda en la cuerda semi-infinita, utilizando la transformada de Laplace:

    (a) $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(0,t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(2\pi t) & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(0,t) = t \quad t \geqslant 0 \\ u(x,0) = 0 \quad x \geqslant 0 \\ u_t(x,0) = A \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

    Analizar la posibilidad de solucionar estos problemas usando otras herramientas y confrontar las expresiones obtenidas.